

第 1 問

1,重力

2,復元力はコンデンサー、慣性はコイル

3,(自信なし)

振動特性…周期が長くなる。

波動特性…波長が長くなる。

第 2 問

定義…質点の振動において全ての質点と同周期で振動する状態、または対応する運動方程式の解。

物理的意味…任意の初期条件を満たす解が基準振動の線形結合で表される。

数学的意味…その系の微分方程式の一般解の基底。

第 3 問

(レポートから転載)

おもりの質量を m 、図2の自然長からの伸びを x_0 とする。つまり

$$mg = -\frac{d}{dx}\left(\frac{kx^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4}\right)\bigg|_{x=x_0} = -kx_0 - \lambda x_0^3$$

である。

それぞれのつり合いの位置(図1ならそのまま原点)を新たな原点にとり、運動方程式をたてる。

図1

$$m\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{kx^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4}\right) = -kx - \lambda x^3 = -kx$$

(最後の変形は x が微小量で x の二乗以上の項は無視できることから従う。)

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

よって周期は

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

図2

$$m\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{k(x-x_0)^2}{2} + \frac{\lambda(x-x_0)^4}{4}\right) + mg = -k(x-x_0) - \lambda(x-x_0)^3 + mg$$

$$= -kx + kx_0 - \lambda x^3 + 3\lambda x^2 x_0 - 3\lambda x x_0^2 + \lambda x_0^3 + mg$$

$$= -kx - \lambda x^3 + 3\lambda x^2 x_0 - 3\lambda x x_0^2 = -(k + 3\lambda x_0^2)x$$

(最後の変形は x が微小量で x の二乗以上の項は無視できることから従う。)

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{k + 3\lambda x_0^2}{m}x$$

よって周期は

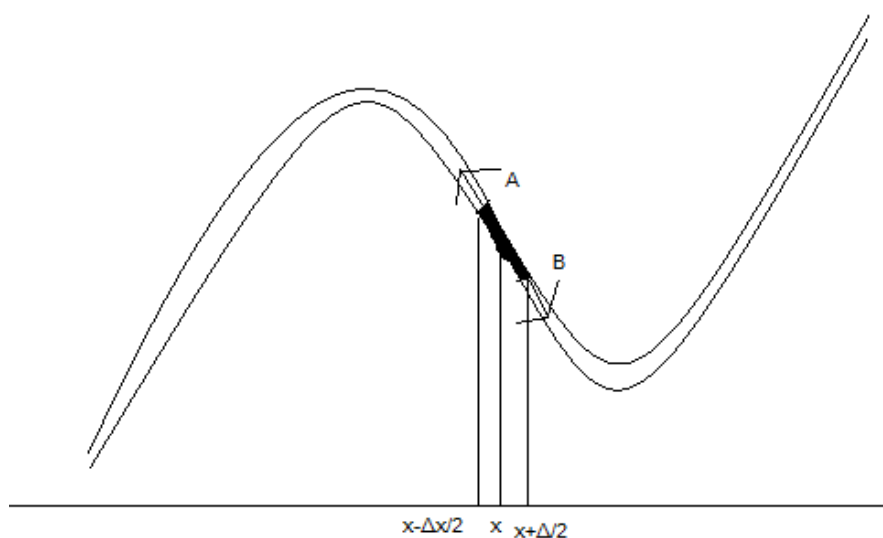
$$2\pi \sqrt{\frac{m}{k + 3\lambda x_0^2}}$$

よって $\lambda > 0$ なので図2の周期がより短くなる。

第4問

(1)(公式の証明を出すなんて恐ろしい...)

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \ll 1$ とする。



A点での力について、

$$-\frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x - \frac{\Delta x}{2}, t)}{\partial x}\right)^2}} \left(1, \frac{\partial f(x - \frac{\Delta x}{2}, t)}{\partial x}\right) = -T \left(1, \frac{\partial f(x - \frac{\Delta x}{2}, t)}{\partial x}\right)$$

B点での力について、

$$\frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x + \frac{\Delta x}{2}, t)}{\partial x}\right)^2}} \left(1, \frac{\partial f(x + \frac{\Delta x}{2}, t)}{\partial x}\right) = T \left(1, \frac{\partial f(x + \frac{\Delta x}{2}, t)}{\partial x}\right)$$

よって上で黒く塗っているところについて、運動方程式は $f(x)$ 方向のみであり、

$$\begin{aligned} (\Delta x) \rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= T \left(-\frac{\partial f(x - \frac{\Delta x}{2}, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x + \frac{\Delta x}{2}, t)}{\partial x} \right) \\ &= T \left(-\left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) \right) + \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \right) + O((\Delta x)^3) \right) \\ &= T \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x) + O((\Delta x)^3) \end{aligned}$$

両辺 $\rho \Delta x$ でわって移項して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

(2)

(ダランベールの解を導くのは書くべきか?)

ダランベールの解をつかって、

$$f(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

と表される。両辺 t で微分して、

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = v \left(-\frac{\partial F(X)}{\partial X} + \frac{\partial G(X)}{\partial X} \right)$$

$$\therefore G(X) = F(X)$$

$$\therefore f(x, t) = F(x - vt) + F(x + vt)$$

$F(x - vt)$ を $\frac{1}{2}F(x - vt)$ に置き換えて、

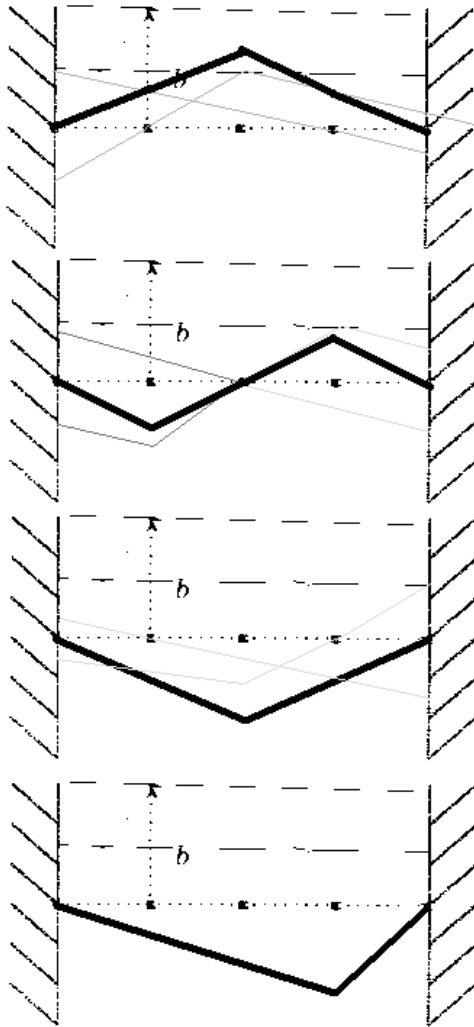
$$f(x, t) = \frac{1}{2} (F(x - vt) + F(x + vt))$$

$t=0$ で $f_0(x)$ に一致するので、

$$f_0(x) = F(x)$$

(3)

上から順に。



(4)

変数分離法によるので、 $f(x,t)=X(x)T(t)$ とすると、波動方程式において、

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

よって両辺定数となるのでそれを $-\lambda^2$ とすると、

$$X(x) = (\text{定数}) \times \cos\left(\frac{\lambda}{v}x + \phi\right)$$

$$T(x) = (\text{定数}) \times \cos(\omega t + \phi)$$

境界条件より

$x=0$ について、

$$X(x) = \sin\left(\frac{\lambda}{v}x\right)$$

となることがわかり、 $x=l$ について、

$$\frac{\lambda}{v} l = n\pi$$

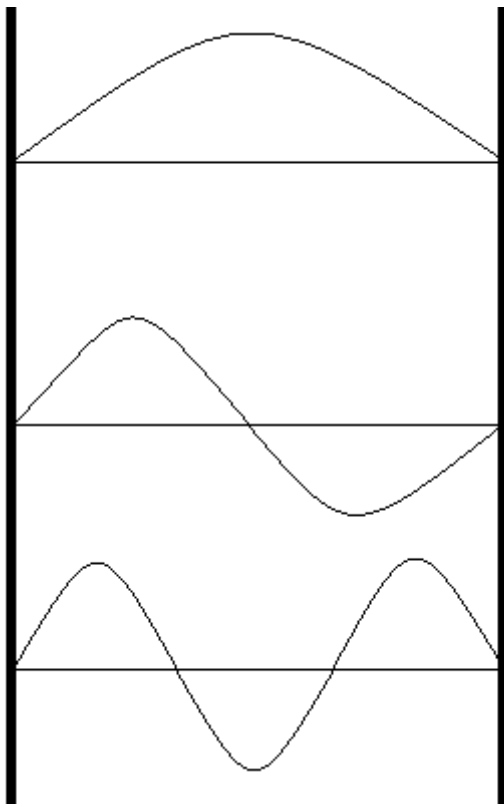
つまり、

$$\lambda = \frac{n\pi v}{l}$$

となることがわかる。よって、基準振動は

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{l} t + \phi\right)$$

但し n は自然数。概形を順に示す。



(5)

(また証明...)

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^l \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx = \rho \int_0^l \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dx + \frac{T}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= T \left(\int_0^l \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{d}{dt} \int_0^l \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx \right) \\ &= T \left(\left[\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} \right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \int_0^l \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) = 0 \end{aligned}$$

(6)

この場合エネルギー保存則より $t=0$ しか見なくてよい。

$$\int_0^l \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{l}{4}} \frac{T}{2} \left(\frac{4b}{l} \right)^2 dx + \int_{\frac{l}{4}}^l \frac{T}{2} \left(\frac{4b}{3l} \right)^2 dx = \frac{8b^2 T}{3l}$$

(7)

フーリエ展開をすると、最も低い基準振動についてその係数が

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx = \frac{16\sqrt{2}b}{3\pi^2}$$

となる。よって

$$\frac{128b^2 T}{9\pi^2 l}$$

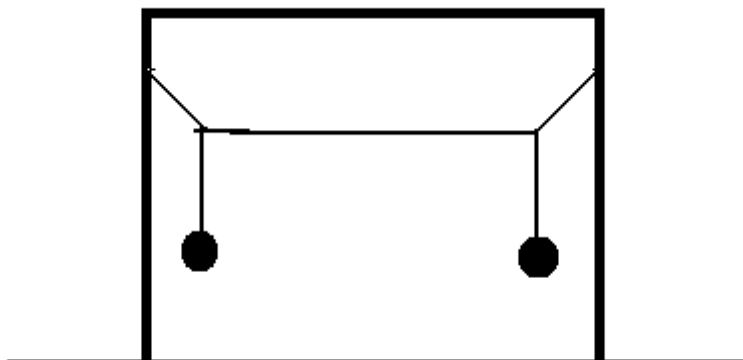
がエネルギーで、割合は

$$\frac{128b^2 T}{9\pi^2 l} \frac{3l}{8b^2 T} = \frac{16}{3\pi^2} = 54.0\%$$

05 年解答

問題 1

- ・ (1) ギターの弦を鳴らすと、オクターブ違う弦もなり出す。
- (2) はじめに鳴らしたギターの弦が揺らした空気の振動。
- (3) 弦の長さ、張力、太さも含めた材質。
- ・ (1) 音叉を鳴らすと同じ音を出す音叉もなり出す。
- (2) はじめに鳴らした音叉が揺らした空気の振動。
- (3) 音叉の材質と形。
- ・ (1) 下図の片方のおもりを揺らすともうひとつのおもりも揺れ出す。



- (2) はじめに揺らした重りによって動く上の糸。
- (3) 糸の長さとおもりの重さ。

問題 2

(1)

$$\frac{d^2}{dt^2} m x_1(t) = -2k x_1(t) + k x_2(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} m x_2(t) = k x_1(t) - 2k x_2(t) + k X(t)$$

(2)

基準振動なので、 $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos \omega t$ とすると、

$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) = k \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\begin{pmatrix} -2 + \frac{m\omega^2}{k} & 1 \\ 1 & -2 + \frac{m\omega^2}{k} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

$$\left(-2 + \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 = 1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{3} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ のとき、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

$$\text{よって} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$\omega = \sqrt{3} \sqrt{\frac{k}{m}}$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

$$\text{よって} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \sqrt{3} \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$\text{答え} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \sqrt{3} \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

(3)

$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ a \end{pmatrix} \cos \omega t$ とすると、運動方程式は下の方になる。

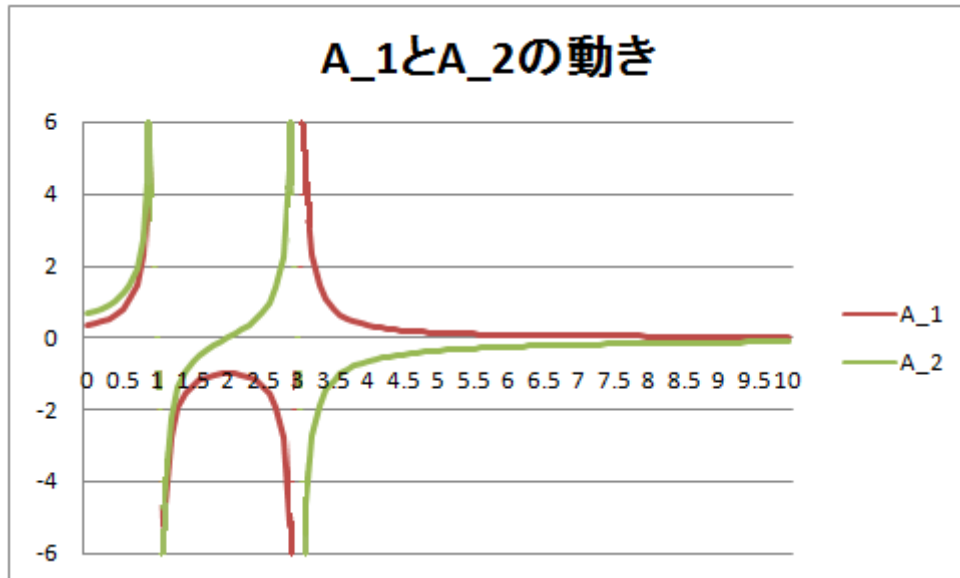
$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) = k \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\begin{pmatrix} -2 + \frac{m\omega^2}{k} & 1 & 0 \\ 1 & -2 + \frac{m\omega^2}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ a \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{a}{\left(\frac{m\omega^2}{k} - 3\right)\left(\frac{m\omega^2}{k} - 1\right)} \\ A_2 = -\frac{a\left(\frac{m\omega^2}{k} - 2\right)}{\left(\frac{m\omega^2}{k} - 3\right)\left(\frac{m\omega^2}{k} - 1\right)} \end{cases}$$

(4)

ここでは定数 (k、m、a) をすべて1とする。縦軸が A_1 、 A_2 の大きさ、横軸が ω^2 の大きさ。



代数として、発散しているところは

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{3} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

であり、 A_2 が軸と交差しているところは

$$\omega = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

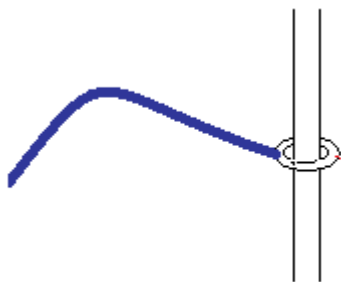
である。

特徴について、発散するところがあるが、これはちょうど $X(t)=0$ のときの振動数、つまり固有振動数と同じで、ブランコをタイミングよく押すと大きく振れる現象と似ている。共鳴である。確かに、 ω が小さいところで起こる発散は同位相であり、大きいところでは逆位相になっていて、基準振動と対応している。また、 A_2 が動かなくなるところは、おもり 1 からの力と強制振動からの力がちょうど釣り合っていて起こる現象である。また、 ω が小さすぎれば各時点ほぼ釣り合いが成り立つのでそのような動きをし振幅が小さく、また大き過ぎるとおもりの慣性によりおもりが動く前に力が逆転するのでそこまで動かなくて振幅が小さい。

問題 3

(1)

自由端において、先が図のようになっているとする。



先についているのはおもりが 0 に近似できるリングである。ここで図に示しているように端で傾きが 0 でなければ棒に平行な方向にリングに対して力が働くが、そうするとリングの棒に平行な方向の運動方程式に対して、重さが 0 のものに対して力が働くことになる。これでは等式が成り立たない。よって背理法より説明できる。

(2)

$x=0$ に関して、

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=0} &= \frac{\partial F(x - vt)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{\partial G(x + vt)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{v} \left(-\frac{\partial F(x - vt)}{\partial t} \Big|_{x=0} + \frac{\partial G(x + vt)}{\partial t} \Big|_{x=0} \right) \\ &= \frac{1}{v} \left(-\frac{\partial F(-vt)}{\partial t} + \frac{\partial G(vt)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

両辺微分。

$$-F(-vt) + G(vt) = 0$$

$$G(X) = F(-X)$$

$x=l$ に関して、

$$0 = f(l, t) = F(l - vt) + F(-(l + vt))$$

$$F(l - vt) = -F(-(l + vt))$$

$$F(X) = -F(X - 2l)$$

つまり、 $F(X)$ のある波形はそこから $2l$ だけ離れたところではその波形が反転して現れる。

(3)

初速度 0 なので、

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \Big|_{t=0} &= \frac{\partial F(x - vt)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial G(x + vt)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v \left(-\frac{\partial F(x - vt)}{\partial x} \Big|_{t=0} + \frac{\partial G(x + vt)}{\partial x} \Big|_{t=0} \right) \\ &= v \left(-\frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

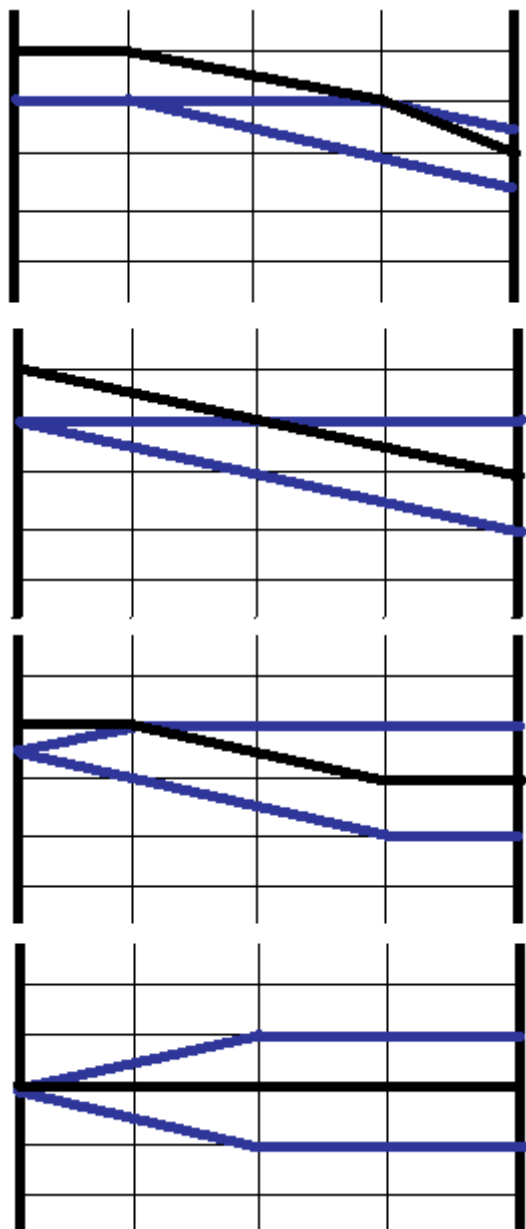
両辺 x で積分して、 $F(x) = G(x) = F(-X)$ よって F は偶関数。

よって、

$$f_0(x) = F(x) + G(x) = F(x) + F(-x) = 2F(x)$$

$$F(x) = \frac{f_0(x)}{2}$$

(4)



(5)

変数分離法によるので、 $f(x,t)=X(x)T(t)$ とすると、波動方程式において、

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

よって両辺定数となるのでそれを $-\lambda^2$ とすると、

$$X(x) = (\text{定数}) \times \cos\left(\frac{\lambda}{v}x + \phi\right)$$

$$T(t) = (\text{定数}) \times \cos(\lambda t + \phi)$$

境界条件より

$x=0$ について、

$$X(x) = \cos\left(\frac{\lambda}{v}x\right)$$

となることがわかり、 $x=l$ について、

$$\frac{\lambda}{v}l = \frac{2n-1}{2}\pi$$

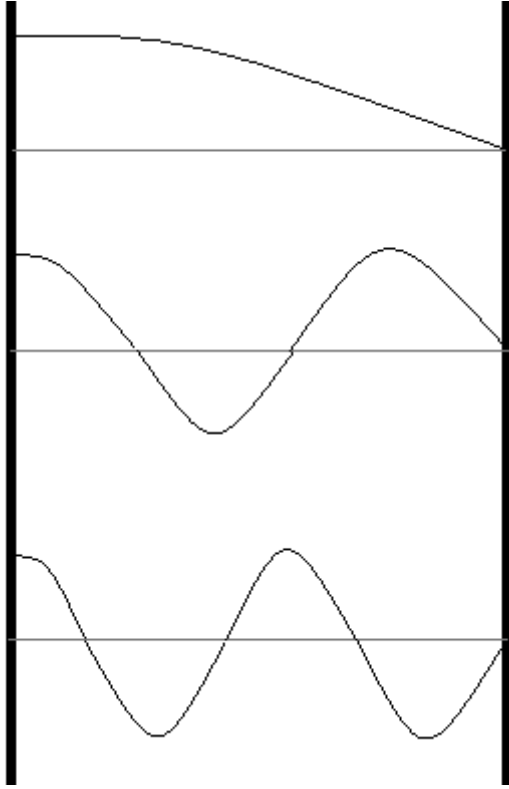
つまり、

$$\lambda = \frac{(2n-1)\pi v}{2l}$$

となることがわかる。よって、基準振動は

$$\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{l}t + \phi\right)$$

但し n は自然数。概形を順に示す。



(6)

この場合エネルギー保存則より $t=0$ しか見なくてよい。

$$\int_0^l \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx = \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{T}{2} \left(-2 \frac{b}{l} \right)^2 dx = \frac{b^2 T}{l}$$

(7)

フーリエ展開をすると、最も低い基準振動についてその係数が

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{8\sqrt{2}b}{\pi^2}$$

となる。よって

$$\frac{\pi T}{16l} \times \left(\frac{8\sqrt{2}b}{\pi^2} \right)^2 = \frac{8Tb^2}{\pi^3 l}$$

がエネルギーで、割合は

$$\frac{8Tb^2}{\pi^2 l} \frac{1}{b^2 T} = \frac{8}{\pi^2} = 81\%$$

(注：こんなの試験中に気づいた人は公式を覚えてこなくて自ら導いた人だけでしょうが、
sin カーブでは係数に $\frac{\pi T}{4l}$ をかければ良かったのですが、cos カーブでは $\frac{\pi T}{16l}$ をかけなければいけません。エネルギー密度から導けます。はい、かなりのハイレベルです。オレには無理です。Thanks to Fujigaki ということで)。

06 年解答

問題 1

(1)

外力が物体に周期的な力を及ぼすとき、その物体の固有振動数に近い振動数で力を及ぼせばその物体の振動が激しくなるという現象。ただし完璧にその固有振動数にあえばいいわけでもなく、最も適当な振動数はその振動数より少しずれたところとなる。

(2)

分散性の波とは速さが振動数によって違う波である。真空中での光は速度が定数であり非分散性の波であるが、空気中の光では波長によって屈折率が違うので伝達速度が違い速度が変わってきて分散性の波となる。

(3)

分散性の波について、わずかに振動数が異なる波が重なると非分散性の波とおなじようになりが生じるが、そのうなりについて包絡線と振動成分の速さが異なってくる。位相速度を後者の速度、群速度を前者の速度という。群速度は角振動数の波数偏微分で与えられる。

問題 2

(1)

$$m\ddot{r}_1 = -T_1 \begin{pmatrix} \theta_1 \\ -1 \end{pmatrix} + T_2 \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -1 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m\ddot{r}_2 = -T_2 \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -1 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$T_1 = 2mg, T_2 = mg$$

(3)

$$\ddot{r}_1 = -2g \begin{pmatrix} \theta_1 \\ -1 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -1 \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{r}_2 = -g \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -1 \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

基準振動なので、 $\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos \omega t$ とすると、

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) = g \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t)$$

$$\begin{pmatrix} -2 + \frac{l\omega^2}{g} & 1 \\ 2 & -2 + \frac{l\omega^2}{g} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{0}$$

$$\omega = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}}, \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

(4)

$\omega = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}}$ のとき、

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

$\omega = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}}$ のとき、

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

答え $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t$

(4)

(いろいろ考えた結果、多分慣性力を使うべきだろうと思いました。間違っている可能性もあります)。

慣性力をつかうと運動方程式は、

$$\ddot{r}_1 = -2g \begin{pmatrix} \theta_1 \\ -1 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -1 \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a\omega^2 \cos \omega t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{r}_2 = -g \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -1 \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a\omega^2 \cos \omega t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

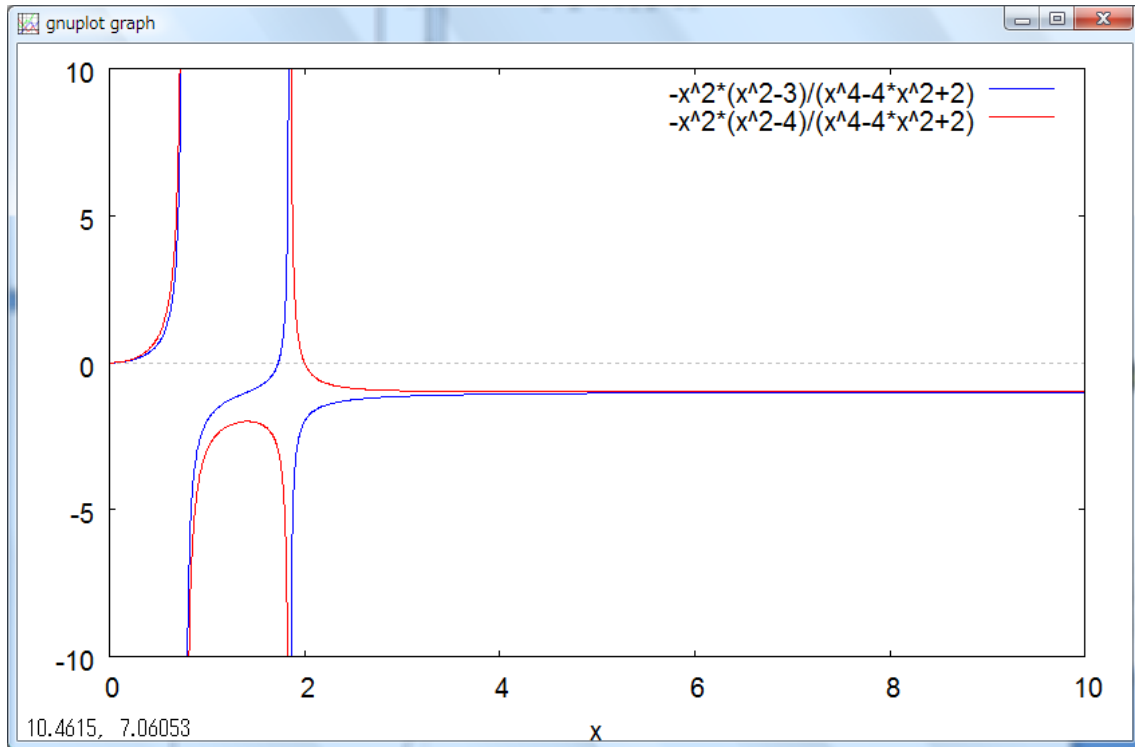
$\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ a \end{pmatrix} \cos \omega t$ とすると、

$$-l\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) = g \begin{pmatrix} -2 & 1 & \omega^2 \\ 2 & -2 & \omega^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t)$$

$$\begin{pmatrix} -2 + \frac{l\omega^2}{g} & 1 & \omega^2 \\ 2 & -2 + \frac{l\omega^2}{g} & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ a \end{pmatrix} = 0$$

$$A_1 = -a \frac{g\omega^2(l\omega^2 - 3g)}{l^2\omega^4 - 4lg\omega^2 + 2g^2}, A_2 = -a \frac{g\omega^2(l\omega^2 - 4g)}{l^2\omega^4 - 4lg\omega^2 + 2g^2}$$

(5)



これはもう、レポートでしたのとおなじですね。すみません、間違えていました。

問題 3

(1)

ダランベールの解で求める。

$f(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt)$ とすると、境界条件より

$$0 = f(0, t) = F(-vt) + G(+vt) \quad \therefore G(+vt) = -F(-vt)$$

$$0 = f(l, t) = F(l - vt) + G(l + vt) = F(l - vt) - F(-l + vt) \quad F(X) \text{ は } 2l \text{ の周期関数}$$

また、初期速度 0 より、

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial F(x - vt)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial G(x + vt)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v \left(-\frac{\partial F(x - vt)}{\partial x} \Big|_{t=0} + \frac{\partial G(x + vt)}{\partial x} \Big|_{t=0} \right) \\ &= v \left(-\frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

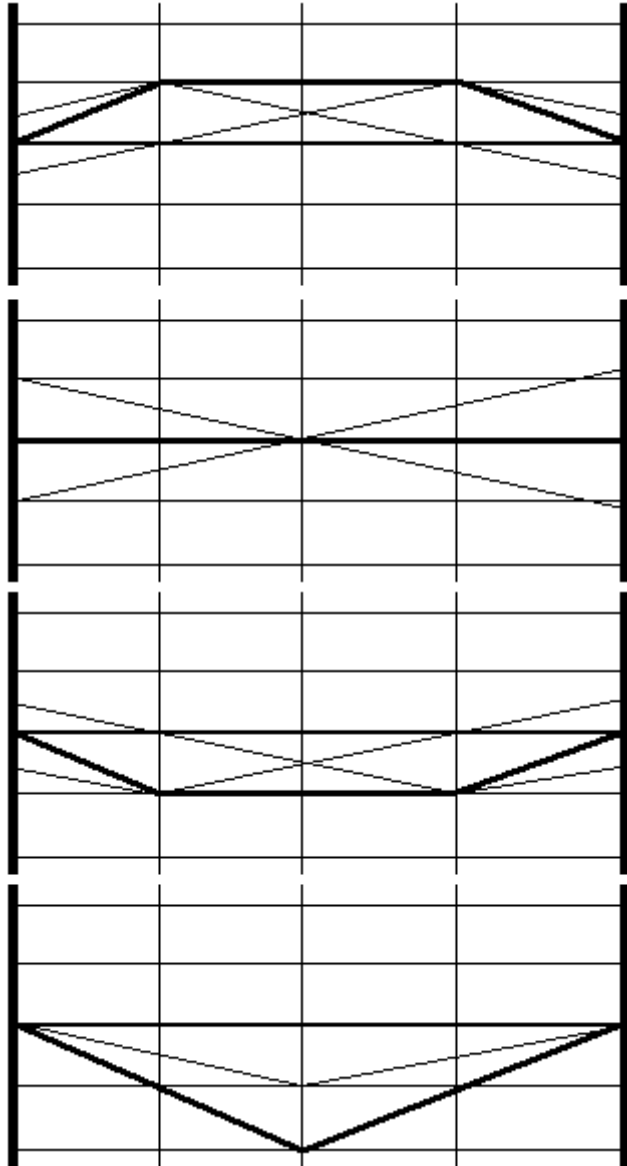
両辺 x で積分して

$$F(x) = G(x) = -F(-x)$$

よって、初期波形より、

$$f_0(x) = F(x) + G(x) = 2F(x)$$

以上より概形が書ける。



(2)

変数分離法によるので、 $f(x,t)=X(x)T(t)$ とすると、波動方程式において、

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

よって両辺定数となるのでそれを $-\lambda^2$ とすると、

$$X(x) = (\text{定数}) \times \cos\left(\frac{\lambda}{v}x + \phi\right)$$

$$T(t) = (\text{定数}) \times \cos(\lambda t + \phi)$$

境界条件より
 $x=0$ について、

$$X(x) = \sin\left(\frac{\lambda}{l}x\right)$$

となることがわかり、 $x=l$ について、

$$\frac{\lambda}{v}l = n\pi$$

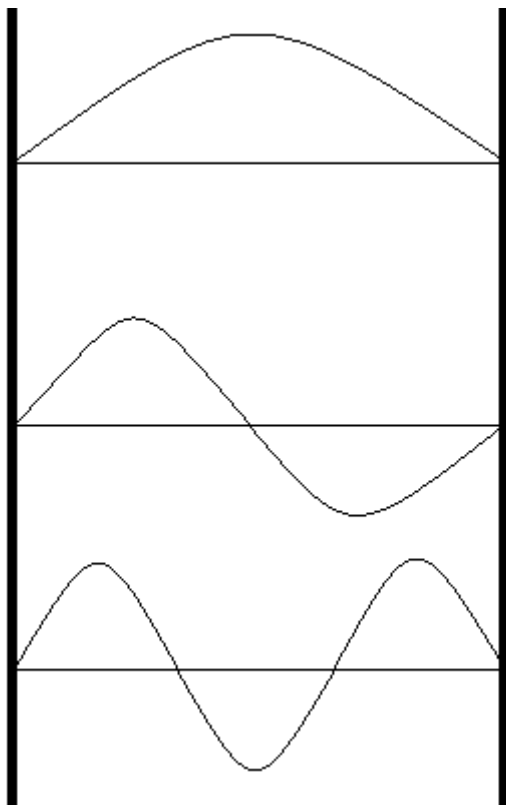
つまり、

$$\lambda = \frac{n\pi v}{l}$$

となることがわかる。よって、基準振動は

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{l}t + \phi\right)$$

但し n は自然数。概形を順に示す。



一般に、

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{8b}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

よって、

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8b}{\pi^2 (2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi v}{l}t + \phi\right)$$

初期条件については $\phi = 0$ とすればみたされる。解の一意性よりそれが解。

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8b}{\pi^2 (2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi v}{l} t\right)$$

(最後のところ、項別微分なので数学的にあいまいさが残ってしまうのかなあ)。

(3)

エネルギーは

$$\int_0^l \frac{1}{2} T \left(\frac{2b}{l} \right)^2 dx = \frac{2b^2 T}{l}$$

(4)

$$\frac{\pi^2 T}{4l} \left(\frac{8b}{\pi^2} \right)^2 \frac{1}{2b^2 T} = \frac{8}{\pi^2} = 81.5\%$$

～講評とポイント～

年々易化した、というかいい問題をつくれるようになってきていますね。よかったよかった。波動方程式の証明とか無理がありますよね。で、悲しいことですが、優取ろうと思うなら授業中に扱った式展開は定理の証明も含めて自分で展開できるようにならなければなりませんし、語句の意味もほぼ丸暗記する必要がありますね。要するにノート丸暗記しなきゃ、ということです。で、そんなことするくらいなら必修に時間まわすべきだと思います。単位とるくらいなら、この過去三年間を解けばいいでしょう。形式は大きくいって変わっていません。パターンで半分は解けるでしょう。

あと、レポートを復習してください、この人、ものすごく使いまわします。数年前はレポートがまんま試験にでていました。